A

66. Paley-Fejér-Szász ノ定理ニ就テ

高橋進一（阪大）

E. Landau: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. p. 63 ニ次ノ定理ガアル。

$$f(z)=\sum c_n z^n \quad |z|<1 \quad \text{ヲ}$$

$$|f(z)|<M,\ |z|<1 \ ; \quad c_n=O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{トスルト}$$

$$\left|\sum_{n=0}^{m} c_n e^{n\varphi i}\right|<N \qquad 0\leqq\varphi<2\pi$$

ココニ N ハ φ 及ビ m ニハ無関係ナ常数デアル。

コノ定理ハ次ノ様ニヤレバ Landau ノ証明ヨリハ幾分簡単ニナル。

$$\sum_{n=0}^{m} c_n e^{n\varphi i}=s_m(e^{i\varphi}) \quad \text{トオケバ}$$

$$s_m(e^{i\varphi})=\frac{s_0(e^{i\varphi})+s_1(e^{i\varphi})+\cdots+s_m(e^{i\varphi})}{m+1}+\frac{\sum n c_n e^{n\varphi i}}{m+1}$$

ヨリ

$$|s_m(e^{i\varphi})|\leqq\left|\frac{s_0(e^{i\varphi})+s_1(e^{i\varphi})+\cdots+s_m(e^{i\varphi})}{m+1}\right|+\frac{\sum_{n=0}^{m} n|c_n|}{m+1}$$

$|f(z)|<M,\ |z|<1$ デアルカラ Fejér ノ定理ニ依テ

$$\left|\frac{s_0(e^{i\varphi})+s_1(e^{i\varphi})+\cdots+s_m(e^{i\varphi})}{m+1}\right|<M$$

又 $c_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$ ヨリ $K\geqq nc_n \quad (n=0,1,2,\cdots)$ ナル常数 K ガアル。

依テ $$|s_m(e^{i\varphi})|<M+\frac{\sum^m K}{m+1}=M+K$$

即チ $N=M+K$ ト置ケバヨイ。（Landau ノ本デハ $N=M+2K$ トナツテヰル）

コノ定理ハ単位円周上デ一様ニ收斂スルガ絶対收斂シナイ冪級数ガ存在スルトイフ Hardy ノ定理ノ証明ニ用ヒラレル。

扨テコノ定理ハ $c_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$ ノ代リニ次ノ様ナ Landau 型ノ條件ニ置キ換ヘテモ成立スル。即チ $c_n=\alpha_n+i\beta_n$ トオイテ

$$n\alpha_n>-K,\quad n\beta_n>-K \qquad (K\text{ハ任意ノ正数})$$

コウナルト一寸 Tauber 型ノ定理ニ類似ナ形式トナツテ興味ガアル。証明ハ表題ニアル Paley-Fejér-Szász ノ定理ヲ冪級数ニ通用シタノデアル。

Paley ハ Journ. London Math. Soc. vol 7 (1932) デ On Fourier Series with positive Coefficients. ノ表題ノ下ニ次ノ定理ヲ述ベタ,

$f(x)$ ヲ $0 \leqq x \leqq 2\pi$ デ積分可能, 且

$$|f(x)| \leqq M \qquad 0 \leqq x \leqq 2\pi$$

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{2}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

$$a_n \geqq 0, \quad b_n \geqq 0 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

ナルトキ

$$|S_n(x)| \leqq 10 M \qquad 0 \leqq x \leqq 2\pi$$

但シ $S_n(x)$ ハ $f(x)$ ノ Fourier Series ノ最初ノ $(n+1)$ 項ノ和デアル。今年 Fejer ガ Bull. Amer. Math. Soc. 40 (1934) p 469, On a Theorem of Paley デ 10 ヲ 4 デ置キカヘタ初等的証明ヲ公ニシタ。又 Szász ハ Acta Mathematica 61 (1933) p 185, Zur Konvergenztheorie der Fourierschen Reihen デ

$$n a_n > -K, \qquad n b_n > -K \quad , n = 0, 1, 2, \cdots$$

ナル條件ノ下ニ $S_n(x)$ ガ有界ナルコトヲ証明シタ。但シ Paley 自身ガ既ニ其事ヲ知ッテヰタ様デアル。然シ $|S_n(x)| < N$ ナル N ノ値ニツイテハ何等ノ知識ガ得ラレナイ。

扨テコレラノ Paley-Fejér-Szász ノ定理ハ conjugate Fourier series ニモ明カニ成立スルカラ ソレカラ適當ニ考ヘテユケバ上ニ述ベタ冪級数ニ関スル定理トナル譯デアル。 コレハ相當 deep ナ定理ト思フガ面白イ application ガ見付カラヌノデ唯定理ダケヲ述ベテオキマス。

附記： Paley-Fejér-Szász ノ定理ニヨラナイデ直接証明デキサウニモ思フガ今一寸考ヘツカナイ。

(11月30日 受取)